Probeklausur Fortgeschrittene Mathematik für Ökonomen

**Aufgabe 1** (Extrema unter Nebenbedingungen)

Gesucht ist das globale Minimum der Funktion
$f(x,y) = x(y^2-1)$ unter den Nebenbedingungen
$x^2+y^2 \leq 4$ und $y \geq 0$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion zur Lösung dieses Problems
(5P) auf und geben Sie die notwendigen (Kuhn-Tucker) Bedingungen dazu an.

(b) Bestimmen Sie hieraus mögliche Kandidaten für das
(12P) globale Minimum.

(c) Ermitteln das globale Minimum und nennen Sie
(3P) ein hinreichendes Argument, warum es sich bei dem von Ihnen gewählten Punkt um das gesuchte globale Minimum handelt.

**Aufgabe 2** (Differentialgleichungen)

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen.

(a) $\dot{x} + x = \frac{x}{t}$ mit $x(1) = 1$

(5P)

(b) $\ddot{x} - x = 5\sin(2t) - 1$

(5P)

(c)
$$\dot{x} = 2x + y + 5\cos(t), \quad x(0) = 0$$
$$\dot{y} = x + 2y + 5\sin(t), \quad y(0) = 0$$
(10P)

Aufgabe 3 ( Kontrolltheorie : Anwendung )

Ein Unternehmen möchte innerhalb von 10 Werktagen 200 Stück eines Produktes liefern. Der Bestand $x(t)$ zum Zeitpunkt $t=0$ der Auftragserteilung ist $x(0)=20$. Die momentane Produktion zum Zeitpunkt $t$ sei $u(t)$ (Stück/Tag), die Zunahme des Bestandes also $\dot{x}(t)=u(t)$. Die momentanen Produktionskosten betragen $8\cdot u(t)+0{,}1\cdot u(t)^2$, die momentanen Lagerkosten $2\cdot x(t)$ (GE/Tag). Gesucht ist die kostenminimale Produktionsfunktion $u^*(t)$ sowie die korrespondierende Bestandsfunktion $x^*(t)$

(a) (5P) Stellen Sie die Zielfunktion zur Lösung dieses Problems auf. Geben Sie die Hamilton-Funktion an sowie die daraus resultierenden notwendigen Bedingungen. Sind die Bedingungen in diesem Falle auch hinreichend?

(b) (15P) Ermitteln Sie $u^*(t)$ und $x^*(t)$.

Aufgabe 4 ( Kontrolltheorie / Variationsrechnung )

Lösen Sie die folgenden Probleme mit Hilfe der Kontrolltheorie.

(a) (8P) Min. $\int_0^T (u(t)-a)^2 e^{-rt}\,dt$ unter der Nebenbedingung $\dot{x}(t)=u(t)$, $x(0)=0$, $x(T)=a\cdot T$, $a,r,T>0$.

(b) (12P) Max. $\left[\int_0^1 -2tx(t)-u(t)^2\,dt+S(x(1))\right]$ mit $S(x)=\ln(x-\frac{1}{6})$ unter der Nebenbedingung $\dot{x}(t)=u(t)$, $x(0)=1$, $u(t)\geq 0$

## Aufgabe 5 (Optimierung in diskreter Zeit)

(a) Lösen Sie unter Verwendung der dynamischen Programmierung das Problem

(10 P)

$$\text{Max} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} (-e \cdot u_t) + \ln(x_T) \right]$$ unter der

Nebenbedingung $x_{t+1} = x_t \cdot u_t$, $x_0 = 1$, $u_t \in [0;1]$.

Bestimmen Sie die optimalen $u_t$, $x_t$, $t = 0, \ldots, T$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des kontrolltheoretischen Ansatzes das Maximum

(10 P)

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{4} (-u_t^2 + 22u_t - 4x_t)$$ unter der

Nebenbedingung $x_{t+1} = x_t + u_t$, $x_0 = 1$, $u_t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die optimalen $u_t, x_t$, $t = 0, \ldots, 4$

Hinweis: Von den 5 Aufgaben gehen 4 Aufgaben in die Bewertung ein. Werden alle Aufgaben bearbeitet, dann entfällt die Aufgabe, bei der Sie die wenigsten Punkte erzielt haben.