Übersicht: Lösen von Differenzialgleichungen

DGL 1. Ordnung: $\dot{x} = F(t, x)$, $x = x(t)$

1. Separabel: $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, $\int f(t)\,dt = \int \frac{1}{g(x)}\,dx$

2. Linear: $\dot{x} + a(t) \cdot x = b(t)$,

$$x(t) = e^{-A(t)}\left(C + \int e^{A(t)} \cdot b(t)\,dt\right), \quad A(t) = \int a(t)\,dt$$

speziell: $\dot{x} + a \cdot x = b(t)$, $x(t) = e^{-at}\left(C + \int e^{at} \cdot b(t)\,dt\right)$

- $b(t) = b$, $x(t) = \frac{b}{a} + C \cdot e^{-at}$, $C \in \mathbb{R}$
- $b(t) = r \cdot e^{st}$, $x(t) = C \cdot e^{-at} + \frac{r}{a+s} \cdot e^{st}$
- $b(t) = p \cdot \sin(st) + q \cdot \cos(st)$

$$x(t) = C \cdot e^{-at} + \frac{ap + qs}{a^2 + s^2} \sin(st) + \frac{aq - ps}{a^2 + s^2} \cos(st)$$

- $b(t) = P_n(t)$; $x(t) = C \cdot e^{-at} + \frac{1}{a} \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(-\frac{1}{a}\right)^i P_n^{(i)}(t)$

$$= C \cdot e^{-at} + \frac{1}{a} \cdot \left(P_n - \frac{1}{a} \cdot P_n' + \frac{1}{a^2} P_n'' - \frac{1}{a^3} P_n''' + \dots \pm \frac{1}{a^n} P_n^{(n)}\right)$$

oder: $\dot{x} + a(t) \cdot x = b(t)$

1. Lösung der homogenen DGL: $x(t) = C \cdot e^{-A(t)}$, $A(t)$ s.o.
2. Partikuläre Lösung $u^*(t)$ durch Wahl einer geeigneten Funktion so bestimmen, dass $\dot{u}^*(t) + a(t) \cdot u^*(t) = b(t)$ (Koeffizientenvergleich)

$\Rightarrow x(t) = C \cdot e^{-at} + u^*(t)$

3. Exakt: $f(t, x) + g(t, x) \cdot \dot{x} = 0$

Exakt, wenn $f_x = g_t$; Lösung: $h(t, x) = C$

mit $h(t, x) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} g(t_0, \xi)\,d\xi$, t_0, x_0 Konst.

Sonst evtl. exakt machen durch Multipl. mit $\beta(\,)$:

Fall 1: $\frac{f_x - g_t}{g}$ nur von t abhängig, $\beta(t) = e^{\int \frac{f_x - g_t}{g}\,dt}$

Fall 2: $\frac{f_x - g_t}{f}$ nur von x abhängig, $\beta(x) = e^{-\int \frac{f_x - g_t}{f}\,dx}$

4. Bernoulli : $\dot{x} + a(t)\cdot x = b(t)\cdot x^r \quad (r = 0;1 : \text{linear})$

$z = x^{1-r} \Rightarrow \frac{1}{1-r}\cdot \dot{z} + a(t)\cdot z = b(t)$ (linear) $\Rightarrow z(t)$

$\Rightarrow x(t) = z^{\frac{1}{1-r}}(t)$

<u>DGL 2. Ordnung</u> : $\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$

1. x fehlt : $\ddot{x} = F(t, \dot{x})$, $u = \dot{x} \Rightarrow \dot{u} = F(t,u)$

$\Rightarrow u(t)$ (s.o.) $\Rightarrow x(t) = \int u(t)\, dt$

2. t fehlt : $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$, $t(x)$: Umkehrfkt. von $x(t)$

$v(x) = t'(x)$, $\dot{v} = \ddot{t} \Rightarrow \dot{v} = -v^3 \cdot F(x, \frac{1}{v})$

$\Rightarrow v(x)$ (s.o.) $\Rightarrow t(x) = \int v(x)\, dx \Rightarrow x(t)$

3. Linear : $\ddot{x} + a(t)\cdot\dot{x} + b(t)\cdot x = f(t)$, homogen für $f(t) = 0$

$x(t) = A\cdot u_1(t) + B\cdot u_2(t) + u^*(t)$, $A, B \in \mathbb{R}$

$u_1(t), u_2(t)$: nichtproportionale Lösungen der homog. DGL

$u^*(t)$: partikuläre Lösung

speziell : (a) $\ddot{x} + a\cdot\dot{x} + b\cdot x = 0$ (homogen)

$r = -\frac{a}{2}$, $w = r^2 - b = \frac{a^2}{4} - b$, $s = \sqrt{|w|}$

Fall I : $w > 0$, $r_{1,2} = r \pm s$, $x(t) = A\cdot e^{r_1 t} + B\cdot e^{r_2 t}$

Fall II : $w = 0$, $x(t) = e^{rt}(A + Bt)$

Fall III : $w < 0$, $x(t) = e^{rt}(A\cdot\sin(st) + B\cdot\cos(st))$

Insbesondere :

- $b = 0 \Rightarrow$ Fall I, $r_1 = 0$, $r_2 = -a$, $x(t) = A + B\cdot e^{-at}$
- $a = 0 \Rightarrow r = 0$, $w = -b$, $s = \sqrt{|b|}$

  $b < 0 \Rightarrow x(t) = A\cdot e^{\sqrt{-b}\,t} + B\cdot e^{-\sqrt{-b}\,t}$

  $b = 0 \Rightarrow x(t) = A + B\cdot t$

  $b > 0 \Rightarrow x(t) = A\cdot\sin(\sqrt{b}\,t) + B\cdot\cos(\sqrt{b}\,t)$

(b) $\ddot{x} + a\cdot\dot{x} + b\cdot x = f(t)$ (partikuläre Lösung)

(i) $f(t) = A$, $u^*(t) = \frac{A}{b}$, $b \neq 0$; $u^*(t) = \frac{A}{a}\cdot t$, $b=0$

(ii) $f(t) = P_n(t)$, $u^*(t) = P_n^*(t)$ (Koeffiz-vergleich)

(iii) $f(t) = p\cdot e^{qt}$, $u^*(t) = \frac{p}{q^2+aq+b}\cdot e^{qt}$

(iv) $f(t) = p\cdot\sin(st) + q\cdot\cos(st)$,
$u^*(t) = A\cdot\sin(st) + B\cdot\cos(st)$ (Koeffiz-vergleich)

Kombination $(+,-,\cdot)$ aus (i)-(iv) analog

4. Euler: $t^2\cdot\ddot{x} + a\cdot t\cdot\dot{x} + b\cdot x = 0$

$r = -\frac{a-1}{2}$, $w = r^2 - b$, $s = \sqrt{|w|}$

Fall I: $w > 0$, $r_{1,2} = r \pm s$, $x(t) = A\cdot t^{r_1} + B\cdot t^{r_2}$

Fall II: $w = 0$, $x(t) = t^r\cdot(A + B\cdot\ln(t))$

Fall III: $w < 0$, $x(t) = t^r\cdot(A\cdot\sin(st) + B\cdot\cos(st))$

Herleitung zu $\ddot{x} + a\cdot\dot{x} + b\cdot x = 0$, $\ddot{x} + a\cdot\dot{x} = -bx$

(a) Spezialfall $a = 0$: $\ddot{x} = w\cdot x$

$w = 1$: $\ddot{x} = x \Rightarrow u_1(t) = e^t$, $u_2(t) = e^{-t}$

- $w > 0$: $u_1(t) = e^{\sqrt{w}t}$, $u_2(t) = e^{-\sqrt{w}t}$
- $w = 0$: $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = A \Rightarrow x(t) = At + B$

$w = -1$: $\ddot{x} = -x \Rightarrow u_1(t) = \sin(t)$, $u_2(t) = \cos(t)$

- $w < 0$: $u_1(t) = \sin(\sqrt{|w|}t)$, $u_2(t) = \cos(\sqrt{w}t)$

(b) Allgemein: $\ddot{x} + a\cdot\dot{x} + b\cdot x = 0$; setze $y(t) = e^{rt}\cdot x(t)$, $r = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \dot{y} = e^{rt}\cdot r\cdot x + e^{rt}\cdot\dot{x} = e^{rt}(r\cdot x + \dot{x})$

$\ddot{y} = e^{rt}\cdot r\cdot(r\cdot x + \dot{x}) + e^{rt}\cdot(r\cdot\dot{x} + \ddot{x}) = e^{rt}\cdot(\underbrace{\ddot{x} + \underbrace{2r}_{a}\dot{x}}_{-b\cdot x} + r^2\cdot x)$ (s.o.)

$= \underbrace{e^{rt}\cdot x}_{y}\cdot\underbrace{(r^2-b)}_{:=w} = y\cdot w$

Mit $s = \sqrt{|w|}$ folgt dann aus (a) für

- $w > 0$: $y(t) = A\cdot e^{st} + B\cdot e^{-st}$
- $w = 0$: $y(t) = At + B$
- $w < 0$: $y(t) = A\cdot\sin(st) + B\cdot\cos(st)$

und somit für $x(t) = e^{-rt}\cdot y(t) = e^{-\frac{a}{2}}\cdot y(t)$
die obigen 3 Fälle.

Partielle DGL : $\dot{x} = f(t,x,y)$, $\dot{y} = g(t,x,y)$

1. Rekursiv : $\dot{x} = f(t,x,y)$, $\dot{y} = g(t,y)$ oder
$\dot{x} = f(t,x)$, $\dot{y} = g(t,x,y)$

DGL mit nur 1 Variablen lösen und in die andere DGL einsetzen.

2. Linear mit konstanten Koeffz. :

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1(t)$$
$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2(t)$$
$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1(t)\\ b_2(t)\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + (b)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} - \mathrm{Spur}(A)\cdot\dot{x} + |A|\cdot x = \dot{b}_1 - \left|\begin{pmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{pmatrix}\right| \quad \text{bzw.}$$

$$\ddot{y} - \mathrm{Spur}(A)\cdot\dot{y} + |A|\cdot y = \dot{b}_2 - \left|\begin{pmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{pmatrix}\right|$$

- Homogene DGL 2. Ordnung für x oder y lösen
- Partikuläre Lösung bestimmen
- Eine der beiden Start-DGL nach der anderen Variable umstellen und Lösung einsetzen.

3. Autonomes System oder $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ enthält kein t mehr :

- Setze $h(x) = y(x)$ $\Rightarrow$ $\dot{h} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(t,x,y)}{f(t,x,y)} = r(x,y) = r(x,h)$
- Löse die DGL 1. Ordnung $\Rightarrow$ $h(x)$
- Einsetzen in $\dot{x} = f(t,x,y) = f(t,x,h(x)) = s(t,x)$ und DGL 1. Ordnung lösen $\Rightarrow$ $x(t)$
- $\Rightarrow$ $y(t) = h(x(t))$

Bei allen DGL : Evtl. gegebene Anfangswerte in die allgemeine Lösung einsetzen, um die Koeffizienten $(A, B, C, ..)$ zu bestimmen.